Übungsklausur Geometrie 2 (Aussichtsplattform)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben sind die Ebenen E und F mit

   $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$

   $F: x_1 - x_2 + 5x_3 = 3$

   a) Wie erkennt man, dass die Ebenen nicht parallel sind?

   b) Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F.

2) Gegeben ist die Ebene $E: 3x_1 + 4x_3 = 0$.

   a) Zeige, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ parallel zu E verläuft.

   b) Welchen Abstand hat die Gerade g von der Ebene E?

3) Bestimme eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform,
   die den Punkt P(1|1|1) und die Gerade $x_1 = 1 + t,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3 + t$ enthält.

4) Gegeben sind die Punkte A(2|1|3), B(2|3|3) und C(5|3|3).

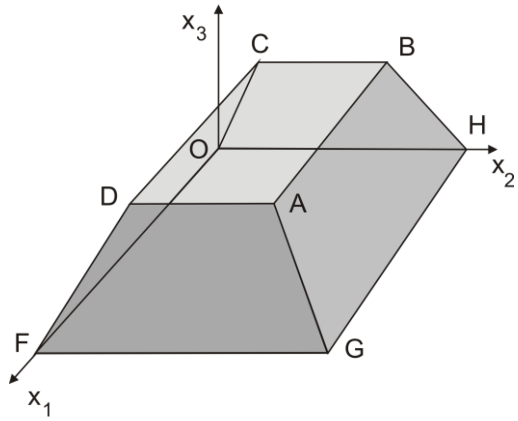
   a) Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

   b) Das Dreieck ABC kann durch den Punkt D zu einem Rechteck ABCD ergänzt werden.
      Gib die Koordinaten von D an.

   c) Verschiebe drei Eckpunkte des Rechtecks so, dass sich ein neues Rechteck mit dem sechsfachen Flächeninhalt ergibt.
      Gib die Koordinaten der drei verschobenen Eckpunkte an.

Übungsklausur Geometrie 2 (Aussichtsplattform)
Wahlteil (mit WTR und Formelsammlung)

Auf dem Ausstellungsgelände einer Gartenschau soll eine Aussichtsplattform in Form eines Pyramidenstumpfes gebaut werden (siehe Abbildung).
Die rechteckige Grundfläche der Aussichtsplattform ist durch die Punkte O(0|0|0), F(18|0|0), G(18|12|0) und H(0|12|0) gegeben (alle Angaben in Metern).



a) Die Dachfläche hat die Eckpunkte A(13,5|9|6), B(4,5|9|6), C(4,5|3|6) und D(13,5|3|6). Der Architekt plant eine Außentreppe, die in der Seitenfläche GHBA liegt.
   (1) Bestimme eine Ebenengleichung E der Seitenfläche GHBA in Koordinatenform.
   (2) Der Neigungswinkel der Außentreppe ist der Winkel zwischen der Grundfläche und der Ebene E. Wie steil ist die Außentreppe?
   (3) Vor dem Treppenbau wird die Seitenfläche GHBA lackiert. Pro Quadratmeter werden 1,5 Liter Lack benötigt. Wie viel Liter Lack müssen bestellt werden?

   (Teilergebnis: $E: 2x_2 + x_3 = 24$)

b) Abends soll die Aussichtplattform mit einem Scheinwerfer beleuchtet werden. Für eine möglichst gute Ausleuchtung der Seitenfläche GHBA soll das Licht senkrecht im Punkt K(9|10|4) auf die Seitenfläche GHBA auftreffen.
   (1) Begründe, dass der Punkt K in der Ebene E liegt.
   (2) Im Punkt P(9|25|0) wird ein senkrechter Mast errichtet, an dem in der Höhe von 11,50m ein Scheinwerfer im Punkt S angebracht wird. Prüfe, ob das Licht des Scheinwerfers senkrecht im Punkt K auf die Seitenfläche GHBA auftrifft.

c) Für die Ausstellung wird zwischen Scheinwerfermast und Aussichtsplattform im Punkt Q(9|18|0) ein 2,3m hoher Baum gepflanzt, der in jedem Jahr um 60cm senkrecht nach oben wächst.
   (1) Gib die Koordinaten der Baumspitze T in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) an.
   (2) Berechne, nach wie vielen Jahren der Baum spätestens gekürzt werden muss, damit der Lichtstrahl weiterhin ungehindert vom Scheinwerfer auf den Punkt K treffen kann.

Übungsklausur Geometrie 2 (Aussichtsplattform)

Pflichtteil

Lösungen:

1) a) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n_E}, \overrightarrow{n_F}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow E \nparallel F$

b) $E - F: x_1 - 2x_3 = -2$

Wähle z.B.: $x_3 = t \;\Rightarrow x_1 = -2 + 2t \;\Rightarrow x_2 = -5 + 7t$

Schnittgerade: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) a) $g \parallel E \Leftrightarrow \overrightarrow{m_g} \perp \overrightarrow{n_E} \Leftrightarrow \overrightarrow{m_g} \cdot \overrightarrow{n_E} = 0: \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0 \Rightarrow g \parallel E$

b) $d(g,E) = \left| \dfrac{3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4}{\sqrt{9+16}} \right| = 2$

3) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$

4) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ das Dreieck ABC hat bei B einen rechten Winkel.

b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - 2 \\ d_2 - 1 \\ d_3 - 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D(5\,|\,1\,|\,3)$

c) A(2|1|3) z.B. B´(2|7|3), C´(8|7|3), D´(8|1|3) (Quadrat mit Kantenlänge 6)

Übungsklausur Geometrie 2 (Aussichtsplattform)

Wahlteil

Lösungen:

a) (1) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}18\\12\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-18\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4{,}5\\-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\12\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\vec{n_E}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$E:2x_2+x_3=24$

(2) $\cos\alpha=\dfrac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right|}{1\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\alpha=63{,}43^o$

(3) $A_{Trapez}=\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot(a+c)$

$c=\left|\overrightarrow{GH}\right|=18,\quad a=\left|\overrightarrow{AB}\right|=9$

Höhe h (Abstand paralleler Geraden also Abstand Punkt-Gerade

$g_{HG}:\vec{x}=\begin{pmatrix}18\\12\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, Hilfsebene durch A: $H:x_1=13{,}5$

Schnittpunkt L von g und H: $18+t=13{,}5\Leftrightarrow t=-4{,}5\Rightarrow L(13{,}5\,|\,12\,|\,0)$

$h=\left|\overrightarrow{AL}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\3\\-6\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

$A_{Trapez}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{45}\cdot(9+18)=90{,}56m^2$

Lackmenge: $90{,}56m^2\cdot1{,}5\dfrac{l}{m^2}=135{,}84l$

b) (1) K in E einsetzen: $2\cdot10+4=24\Rightarrow$ K liegt in E

(2) $S(9\,|\,25\,|\,11{,}5)$ Lichtstrahlrichtung: $\overrightarrow{KS}=\begin{pmatrix}0\\15\\7{,}5\end{pmatrix}$

$\vec{n_E}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. Es gilt $7{,}5\cdot\vec{n_E}=\overrightarrow{KS}$ und somit $\overrightarrow{KS}\perp E$

c) (1) T(9|18|2,3+0,6t) und t in Jahren

(2) Schnitt $g_{Baum}:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\18\\2{,}3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\0{,}6\end{pmatrix}$ mit $g_{Lichtstrahl}:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\25\\11{,}5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

(I) $9=9$

(II) $18=25+2s\quad\Rightarrow s=-3{,}5$

(III) $2{,}3+0{,}6t=11{,}5+s\Leftrightarrow0{,}6t=5{,}7\Leftrightarrow t=9{,}5$

$\Rightarrow$ Der Baum müsste nach 9,5 Jahren gekürzt werden.